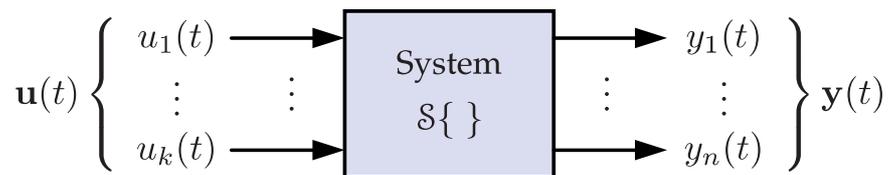


# 9. Zustandsschätzung

## 9. Zustandsschätzung

- Unter einem **System** versteht man eine Menge zusammenhängender Komponenten, die der Erfüllung eines bestimmten Zweckes dienen



- Zur Systembeschreibung werden oft **Differential-** bzw. **Differenzgleichungen** herangezogen
- Bei vielen Anwendungen ist es vorteilhaft, das System im **Zustandsraum** darzustellen

### Definition: Zustand eines Systems

Der **Zustand** eines Systems zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t_0$  entspricht der zum Zeitpunkt  $t_0$  benötigten Information, um bei bekanntem Eingang  $\mathbf{u}(t)$  für  $t \geq t_0$  den Ausgang  $\mathbf{y}(t)$  für beliebige Zeitpunkte  $t \geq t_0$  eindeutig zu bestimmen.

## 9.1 Kalman-Filter

- Systemmodell
- Herleitung der Kalman-Gleichungen
- Interpretation und Beispiele
- Bestimmung der Varianz von Fehlersignalen

## 9.1 Kalman-Filter

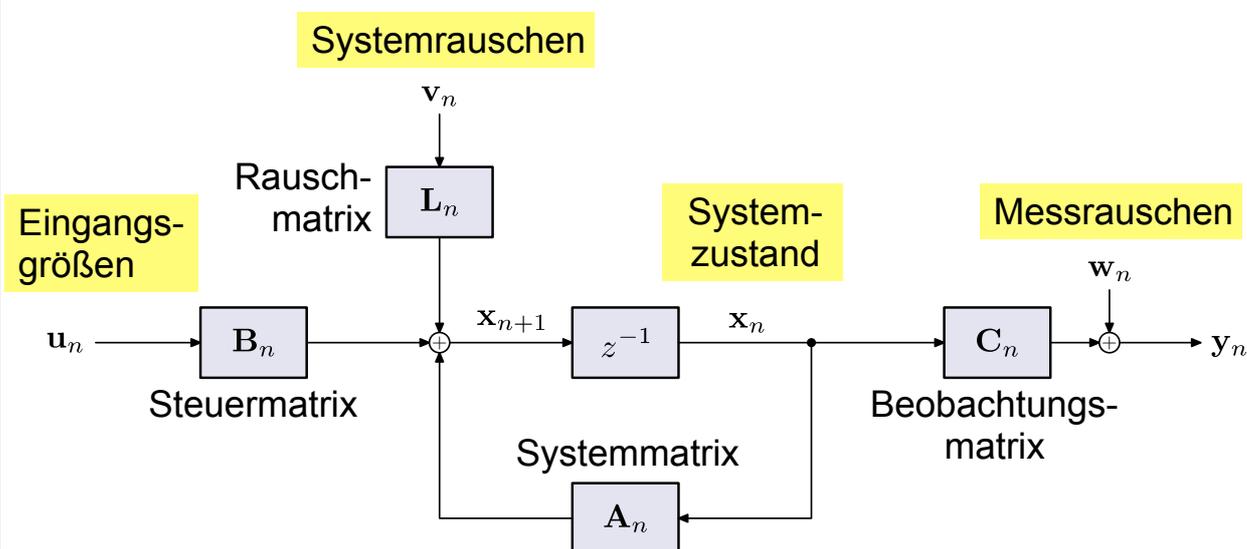
- Prozess- und Signaldarstellung im Zustandsraum
- Modellierung von Prozess und Messvorgang durch **lineare** Modelle
- Ziel: Rekursive Schätzung des Prozesszustandes
- 1. Schritt: Prädiktion des Zustandes mittels Prozessmodell
- 2. Schritt: Verbesserung der Schätzung basierend auf Messwerten
- Gütemaß: Norm des quadratischen Schätzfehlers
- Entwurf besonders geeignet für:
  - zeitvariante Vorgänge (insbesondere auch zeitvariante Systeme)
  - Mehrgrößensysteme in Zustandsraumdarstellung
  - numerische Berechnung im Zeitbereich

## 9.1.1 Systemmodell

- Lineares, zeitdiskretes, **zeitvariantes** Systemmodell:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}_n \mathbf{x}_n + \mathbf{B}_n \mathbf{u}_n + \mathbf{L}_n \mathbf{v}_n$$

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{C}_n \mathbf{x}_n + \mathbf{w}_n$$



### Voraussetzungen

- Deterministische, messbare Eingangsgrößen  $\mathbf{u}_n$

- Systemrauschen  $\mathbf{v}_n$  und Messrauschen  $\mathbf{w}_n$  sind weiße, normalverteilte Prozesse mit den Kovarianzmatrizen  $\mathbf{Q}_n$  bzw.  $\mathbf{R}_n$ :

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{v}_n\} &= \mathbf{0} & E\{\mathbf{v}_n \mathbf{v}_m^T\} &= \mathbf{Q}_n \cdot \delta_{n-m} \\ E\{\mathbf{w}_n\} &= \mathbf{0} & E\{\mathbf{w}_n \mathbf{w}_m^T\} &= \mathbf{R}_n \cdot \delta_{n-m} \end{aligned}$$

- Weitere Annahme: Messrauschen und Systemrauschen unkorreliert:

$$E\{\mathbf{v}_n \mathbf{w}_m^T\} = \mathbf{0} \quad \forall m, n$$

- Ferner werden der Erwartungswert des **Anfangszustandes** und die zugehörige Kovarianzmatrix als bekannt angenommen:

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = E\{\mathbf{x}_0\}, \quad \hat{\mathbf{P}}_0 = E\{(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T\}$$

- Unter diesen Voraussetzungen ist das Kalman-Filter **optimal** bezüglich der Summe der quadratischen Schätzfehler

## 9.1.2 Herleitung der Kalman-Gleichungen

- Schätzkriterium: Minimierung des quadratischen Schätzfehlers:

$$E\left\{ \|\hat{\mathbf{x}}_n - \mathbf{x}_n\|^2 \mid \mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_n \right\} = E\left\{ \|\hat{\mathbf{x}}_n - \mathbf{x}_n\|^2 \mid \mathbf{Y}_n \right\} \rightarrow \min$$

- 1. Schritt: **Prädiktion** des Systemzustandes mittels Systemmodell
- Annahme einer Normalverteilung: Erwartungswert und Kovarianzmatrix beschreiben die **A-priori-Dichte**  $f(\mathbf{x}_{n+1} \mid \mathbf{Y}_n)$  des prädizierten Zustandes vollständig:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1}^* &= E\left\{ \mathbf{x}_{n+1} \mid \mathbf{Y}_n \right\} \quad \text{und} \\ \mathbf{P}_{n+1}^* &= E\left\{ (\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_{n+1}^*)(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_{n+1}^*)^T \mid \mathbf{Y}_n \right\} \end{aligned}$$

- 2. **Filterschritt**: Verbesserung der Schätzung durch neuen Messwert
- Annahme: **A-posteriori-Dichte**  $f(\mathbf{x}_{n+1} \mid \mathbf{Y}_{n+1})$  auch normalverteilt:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{n+1} &= E\left\{ \mathbf{x}_{n+1} \mid \mathbf{Y}_{n+1} \right\} \\ \hat{\mathbf{P}}_{n+1} &= E\left\{ (\mathbf{x}_{n+1} - \hat{\mathbf{x}}_{n+1})(\mathbf{x}_{n+1} - \hat{\mathbf{x}}_{n+1})^T \mid \mathbf{Y}_{n+1} \right\} \end{aligned}$$

### Prädiktionsschritt

#### ■ Prädiktions-Schätzwert:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{n+1}^* &= E\{\mathbf{x}_{n+1} | \mathbf{Y}_n\} \\
 &= E\{\mathbf{A}_n \mathbf{x}_n + \mathbf{B}_n \mathbf{u}_n + \mathbf{L}_n \mathbf{v}_n | \mathbf{Y}_n\} \\
 &= \mathbf{A}_n \underbrace{E\{\mathbf{x}_n | \mathbf{Y}_n\}}_{\hat{\mathbf{x}}_n} + \mathbf{B}_n \mathbf{u}_n + \mathbf{L}_n \underbrace{E\{\mathbf{v}_n | \mathbf{Y}_n\}}_0
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}_{n+1}^* = \mathbf{A}_n \hat{\mathbf{x}}_n + \mathbf{B}_n \mathbf{u}_n$$

#### ■ Mit der Zustandsdifferenzengl. ergibt sich der Prädiktions-Schätzfehler zu:

$$\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_{n+1}^* = \mathbf{A}_n (\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n) + \mathbf{L}_n \mathbf{v}_n$$

#### ■ Die Prädiktions-Kovarianzmatrix lautet damit:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{n+1}^* &= E\left\{(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_{n+1}^*)(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_{n+1}^*)^T | \mathbf{Y}_n\right\} \\
 &= E\left\{(\mathbf{A}_n (\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n) + \mathbf{L}_n \mathbf{v}_n)(\mathbf{A}_n (\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n) + \mathbf{L}_n \mathbf{v}_n)^T | \mathbf{Y}_n\right\}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}_{n+1}^* = E\left\{(\mathbf{A}_n (\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n) + \mathbf{L}_n \mathbf{v}_n)(\mathbf{A}_n (\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n) + \mathbf{L}_n \mathbf{v}_n)^T | \mathbf{Y}_n\right\}$$

#### ■ Prädiktions-Kovarianzmatrix:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{n+1}^* &= \mathbf{A}_n \cdot \underbrace{E\left\{(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T | \mathbf{Y}_n\right\}}_{=\hat{\mathbf{P}}_n} \cdot \mathbf{A}_n^T \\
 &\quad + \mathbf{A}_n \cdot \underbrace{E\left\{(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n) \mathbf{v}_n^T | \mathbf{Y}_n\right\}}_{=[\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}]} \cdot \mathbf{L}_n^T \\
 &\quad + \mathbf{L}_n \cdot \underbrace{E\left\{\mathbf{v}_n (\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T | \mathbf{Y}_n\right\}}_{=[\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}]} \cdot \mathbf{A}_n^T \\
 &\quad + \mathbf{L}_n \cdot \underbrace{E\left\{\mathbf{v}_n \mathbf{v}_n^T | \mathbf{Y}_n\right\}}_{=\mathbf{Q}_n} \cdot \mathbf{L}_n^T
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}_{n+1}^* = \mathbf{A}_n \hat{\mathbf{P}}_n \mathbf{A}_n^T + \mathbf{L}_n \mathbf{Q}_n \mathbf{L}_n^T$$

### Filterschritt (Innovation)

- Ansatz: Linearer Schätzer, der Prädiktionsschätzwert  $\mathbf{x}_{n+1}^*$  und aktuellen Messwert  $\mathbf{y}_{n+1}$  gewichtet summiert:

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{K}_{n+1}^* \mathbf{x}_{n+1}^* + \mathbf{K}_{n+1} \mathbf{y}_{n+1} \quad (24)$$

- Bei **Erwartungstreue** sind beide Verstärkungsmatrizen voneinander abhängig. Durch Einsetzen der Ausgangsgleichung in (24) und Erwartungswertbildung ergibt sich bei Forderung von Erwartungstreue (vgl. Folie 7)

$$E\{\hat{\mathbf{x}}_n\} = E\{\mathbf{x}_n\} \quad \Rightarrow \quad E\{\hat{\mathbf{x}}_{n+1}\} = E\{\mathbf{x}_{n+1}\}$$

ein **Schätzer** der folgenden Form [KSW08]:

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+1}^* + \mathbf{K}_{n+1} (\mathbf{y}_{n+1} - \underbrace{\mathbf{C}_{n+1} \mathbf{x}_{n+1}^*}_{\mathbf{y}_{n+1}^*})$$

- **Filterschätzwert:** Korrektur des Prädiktionsschätzwertes  $\mathbf{x}_{n+1}^*$  durch die mit  $\mathbf{K}_{n+1}$  gewichtete Differenz des gemessenen Ausgangswertes  $\mathbf{y}_{n+1}$  und des prädizierten Ausgangswertes  $\mathbf{C}_{n+1} \mathbf{x}_{n+1}^*$

- Für die **Filter-Kovarianzmatrix** ergibt sich damit die folgende Rekursionsgleichung (Details siehe [KSW08]):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}_{n+1} &= E\left\{ (\mathbf{x}_{n+1} - \hat{\mathbf{x}}_{n+1}) (\mathbf{x}_{n+1} - \hat{\mathbf{x}}_{n+1})^T \mid \mathbf{Y}_{n+1} \right\} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{n+1} \mathbf{C}_{n+1}) \cdot \mathbf{P}_{n+1}^* \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{n+1} \mathbf{C}_{n+1})^T + \mathbf{K}_{n+1} \mathbf{R}_{n+1} \mathbf{K}_{n+1}^T \end{aligned}$$

### Bestimmung der Verstärkungsmatrix

- Wahl einer optimalen Verstärkungsmatrix  $\mathbf{K}$  durch Minimierung des quadratischen Schätzfehlers ( $\rightarrow$  Kalman-Filter ist **LS-Schätzer**):

$$\begin{aligned} E\left\{ (\mathbf{x}_{n+1} - \hat{\mathbf{x}}_{n+1})^T (\mathbf{x}_{n+1} - \hat{\mathbf{x}}_{n+1}) \mid \mathbf{Y}_{n+1} \right\} &\rightarrow \min \\ \Leftrightarrow \text{Spur}(\hat{\mathbf{P}}_{n+1}) &\rightarrow \min \end{aligned}$$

- Durch Ableiten nach  $\mathbf{K}_{n+1}$  und Nullsetzen folgt [KSW08]:

$$\mathbf{K}_{n+1} = \mathbf{P}_{n+1}^* \mathbf{C}_{n+1}^T (\mathbf{C}_{n+1} \mathbf{P}_{n+1}^* \mathbf{C}_{n+1}^T + \mathbf{R}_{n+1})^{-1}$$

## Zusammenfassung

### Prädiktion

$$\mathbf{x}_{n+1}^* = \mathbf{A}_n \hat{\mathbf{x}}_n + \mathbf{B}_n \mathbf{u}_n$$

$$\mathbf{P}_{n+1}^* = \mathbf{A}_n \hat{\mathbf{P}}_n \mathbf{A}_n^T + \mathbf{L}_n \mathbf{Q}_n \mathbf{L}_n^T$$

### Verstärkung

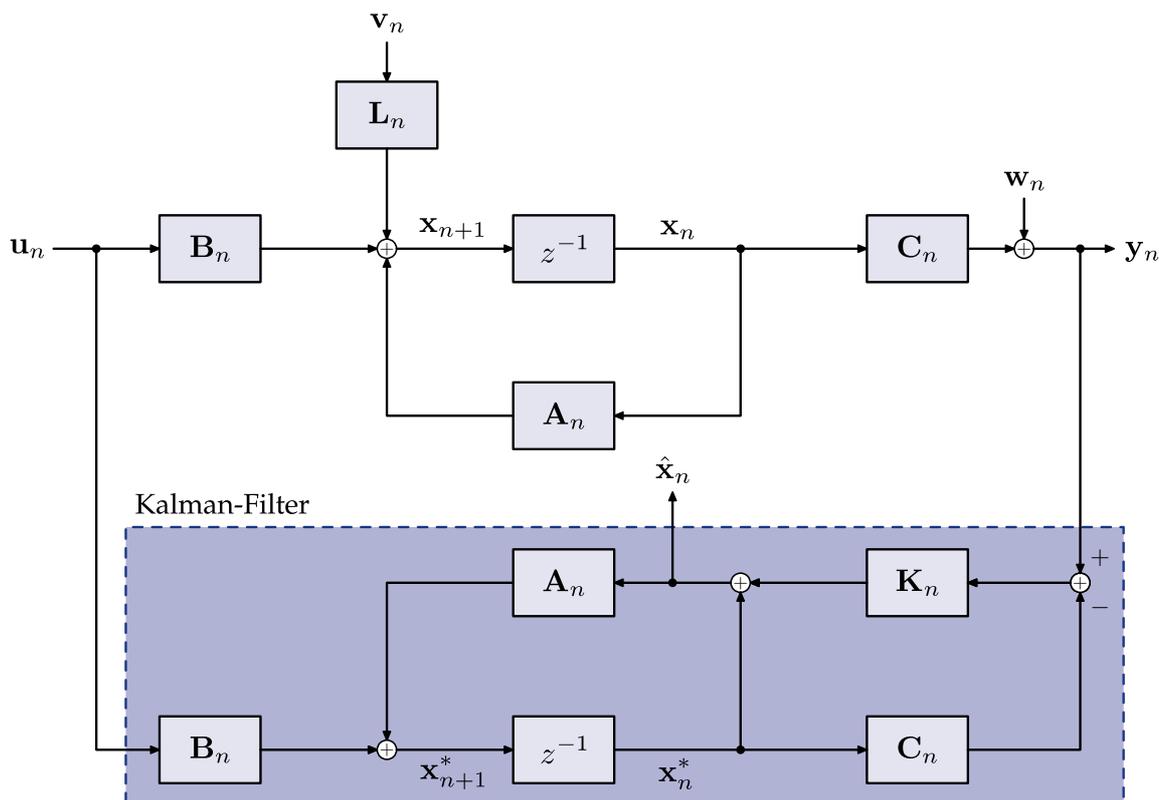
$$\mathbf{K}_{n+1} = \mathbf{P}_{n+1}^* \mathbf{C}_{n+1}^T \cdot (\mathbf{C}_{n+1} \mathbf{P}_{n+1}^* \mathbf{C}_{n+1}^T + \mathbf{R}_{n+1})^{-1}$$

### Filterung

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+1}^* + \mathbf{K}_{n+1} (\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{C}_{n+1} \mathbf{x}_{n+1}^*)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}_{n+1} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{n+1} \mathbf{C}_{n+1}) \cdot \mathbf{P}_{n+1}^* \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{n+1} \mathbf{C}_{n+1})^T + \mathbf{K}_{n+1} \mathbf{R}_{n+1} \mathbf{K}_{n+1}^T \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{n+1} \mathbf{C}_{n+1}) \cdot \mathbf{P}_{n+1}^* \end{aligned}$$

## 9.1.3 Interpretation



### Diskussion

- Zur rekursiven Lösung der Gleichungen sind die **Startwerte** erforderlich; sind diese nicht bekannt, so kann die folgende Wahl getroffen werden:

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{P}}_0 = \sigma_{\hat{\mathbf{x}}}^2 \cdot \mathbf{I}, \quad \sigma_{\hat{\mathbf{x}}}^2 \rightarrow \infty$$

- Das Kalman-Filter hat eine ähnliche Struktur wie ein **linearer Zustandsbeobachter**, aber es bestehen wesentliche Unterschiede:
  - Anwendung auf zeitvariante Systeme dank der zeitlich veränderlichen Verstärkungsmatrix  $\mathbf{K}_n$  möglich
  - Verstärkungsmatrix berücksichtigt zeitlich veränderliche stochastische Eigenschaften des Systemrauschens  $\mathbf{v}_n$  und des Messrauschens  $\mathbf{w}_n$  mittels der entsprechenden Kovarianzmatrizen  $\mathbf{Q}_n$  bzw.  $\mathbf{R}_n$
  - Daher eignet sich das Kalman-Filter zur Zustandsschätzung bei unzuverlässigen Messdaten und bei Störungen am Systemeingang oder bei einem ungenauen Systemmodell
  - Bei zeitinvarianten Systemen und stationären Rauschprozessen konvergiert die Verstärkungsmatrix  $\mathbf{K}_n$  gegen einen konstanten Wert

- Filter-Schätzwert** bei SISO-System:

$$\hat{x}_{n+1} = x_{n+1}^* + K_{n+1} (y_{n+1} - C_{n+1} x_{n+1}^*)$$

$$K_{n+1} = \frac{P_{n+1}^* C_{n+1}}{C_{n+1}^2 P_{n+1}^* + R_{n+1}}$$

- Unzuverlässige Messdaten:**  $R_{n+1} \gg Q_n$ 
  - Term  $R_{n+1}$  im Nenner von  $K_{n+1}$  dominiert  $\Rightarrow K_{n+1} \approx 0$
  - Filterschätzwert:  $\hat{x}_{n+1} \approx x_{n+1}^* = A_n \hat{x}_n + B_n u_n$

Messwerte haben keinen Einfluss, Filter verlässt sich nur auf Modell

- Ungenaues Modell** (starkes Systemrauschen):  $Q_n \gg R_{n+1}$ 
  - Großes  $Q_n \Rightarrow$  großes  $P_{n+1}^* \Rightarrow K_{n+1} \approx 1/C_{n+1}$
  - Filterschätzwert:  $\hat{x}_{n+1} = y_{n+1}/C_{n+1}$

Schätzwert berechnet sich allein aus Messwert

- Kenntnis der Kovarianzmatrizen  $\mathbf{Q}_n$ ,  $\mathbf{R}_n$  der Rauschprozesse erforderlich
- Selten durch theoretische Überlegungen bestimmbar
- Ist das fehlerbehaftete Signal messbar, erfolgt jedoch im Allgemeinen eine Varianzschätzung
- Gleitender Mittelwert als Schätzwert des Erwartungswertes:

$$\bar{y}_n = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} y_{n-i}$$

- Geschätzte Kovarianzmatrix:

$$\mathbf{R}_n \approx \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} (\mathbf{y}_{n-i} - \bar{\mathbf{y}}_n) \cdot (\mathbf{y}_{n-i} - \bar{\mathbf{y}}_n)^T$$

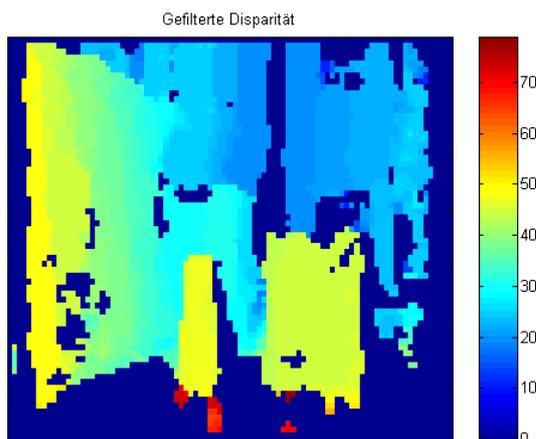
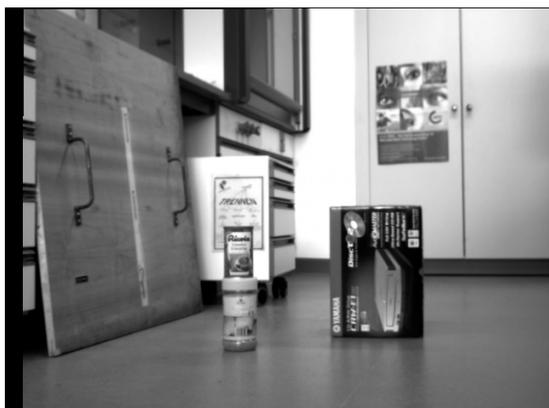
- Auch häufig in der Praxis: Heuristisches Einstellen der Kovarianzen als „Tuning-Parameter“
- Dieser Ansatz gestattet das Einbringen von Wissen in die Schätzung

## 9.1.5 Beispiel

### Beispiel: Abstandsschätzung mit Stereosensor

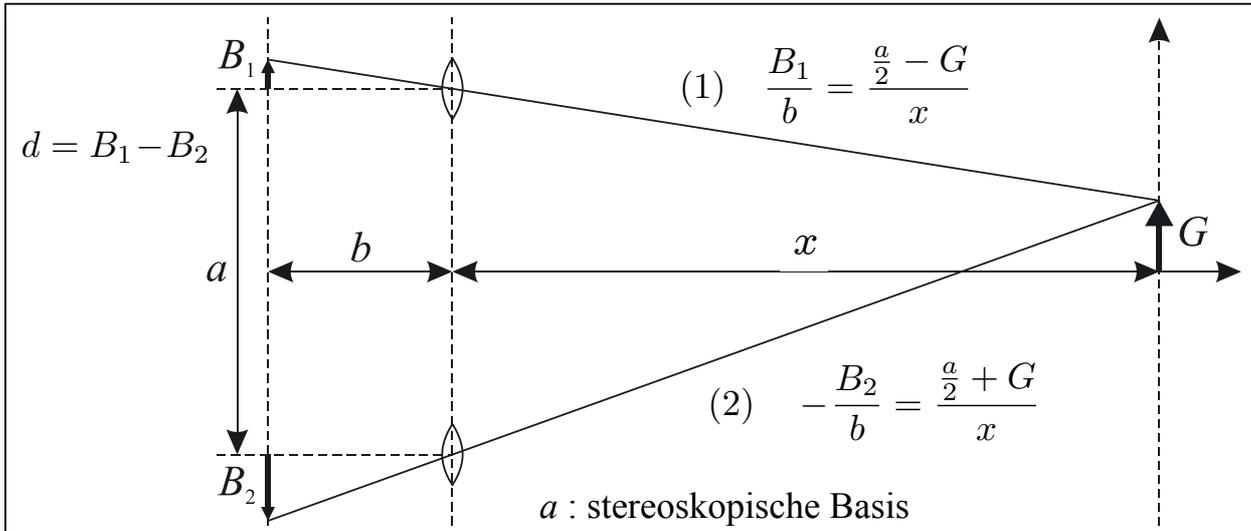
- Umgebungserfassung für mobile Roboter
- Horizontale Verschiebung  $d$  von Hindernissen zwischen beiden Bildern (Disparität, Parallaxe) umgekehrt proportional zum Hindernisabstand  $x$ :

$$\frac{1}{d} = c x$$



### Prinzip des Stereosensors

- Betrachtung eines Objektpunktes aus **2 verschiedenen Blickwinkeln**
- Berechnung der **Gegenstandsweite** ( $\rightarrow$  Relief) aus der **Parallaxe**  $d$



$$(1) + (2) : \quad x = \frac{a b}{d}$$

## 9.1.5 Beispiel

- Die eigene Beschleunigung  $u$  des Roboters in Längsrichtung wird mit einem Beschleunigungssensor erfasst
- Insgesamt ergeben sich mit den Definitionen

$$\mathbf{x}_n = [x_n], \quad \mathbf{u}_n = [u], \quad \mathbf{v}_n = [v_n], \quad \mathbf{w}_n = [w_n],$$

$$\mathbf{y}_n = \begin{bmatrix} 1 \\ d \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = [1], \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{t_A^2}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [c] \quad \text{und} \quad \mathbf{L} = [1]$$

die Zustandsgleichung:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{t_A^2}{2} \cdot u_n + v_n$$

und die Ausgangsgleichung:

$$y_n = c \cdot x_n + w_n$$

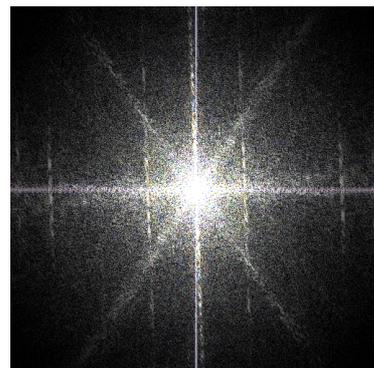
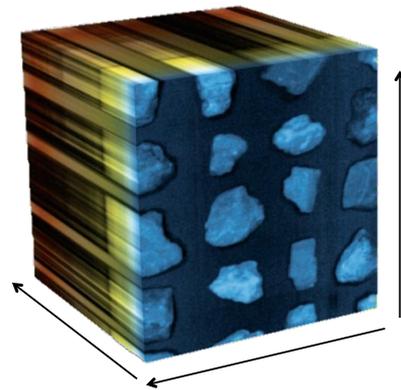
- Bei unzuverlässigen Messungen wird der letzte Schätzwert um die vom Roboter infolge der Beschleunigung  $u$  zurückgelegte Strecke korrigiert
- Bei starkem Systemrauschen wird  $x$  mittels der Messung  $y$  berechnet ■



## Master-Vorlesung „Bildverarbeitung“

### Inhalt

- Optische Abbildung
- Farbe
- Sensoren zur Bildgewinnung
- Bildaufnahmeverfahren
- Bildsignale
- Vorverarbeitung und Bildverbesserung
- Segmentierung
- Texturanalyse
- Detektion



2/0/0 SWS, 3 ECTS  
Sommersemester,  
Do. 14:00 h, EAS